

Mihaela Molodeț

Memorator
MATEMATICĂ GIMNAZIU
pentru
EVALUAREA NAȚIONALĂ



Cuprins

10 beneficii ale învățării matematicii	5
Memorarea	7

ALGEBRĂ

1. Mulțimi	
2. Mulțimea numerelor naturale	
3. Mulțimea numerelor întregi	
4. Mulțimea numerelor raționale	
5. Mulțimea numerelor reale	
6. Calcul algebric	
7. Ecuații/inecuații, sisteme de ecuații	
8. Funcții	
9. Rapoarte și proporții	
10. Organizarea datelor, probabilități și elemente de statistică matematică	

GEOMETRIE

1. Noțiuni geometrice fundamentale	
2. Triunghiul	
3. Patrulaterul	
4. Perimetre și arii	
5. Cercul	
6. Elemente de geometrie în spațiu	

ANEXĂ

Desfășurarea corpurilor geometrice

Piramida triunghiulară regulată	113
Piramida patrulateră regulată	
Piramida hexagonală regulată	
Prisma triunghiulară regulată	
Prisma patrulateră regulată	
Prisma hexagonală regulată	
Paralelipipedul dreptunghic	
Cubul	
Cilindrul circular drept	

Conul circular drept

Secțiuni în corpurile geometrice 123

Secțiuni diagonale

Secțiuni axiale

„Decalogul plus-motivației” („poligonul” tău
pentru succes) 126

*În tăcerea cifrelor îmi aud inima,
fiecare demonstrație e o șoptă de adevăr,
Matematica nu e doar știință, e rugăciunea minții.*

10 beneficii ale învățării matematicii



Dezvoltarea gândirii logice și analitice

Matematica te învață să gândești pas cu pas, să cauți dovezi și să verifici idei. Devii mai bun la a lua decizii raționale.



Antrenarea concentrării și răbdării

Exercițiile matematice îți formează obiceiul de a rămâne atent, chiar și atunci când un lucru pare greu la început.



Rezolvarea eficientă a problemelor

Înveți să identifici o problemă, să cauți metode, să aplici reguli – exact ce ai nevoie și în viața reală!



Gândire critică și evaluare obiectivă

Matematica te învață să pui întrebări: „Este corect?”, „Are sens?” – nu iei totul de bun, ci verifici, calculezi, analizezi.



Structurarea ideilor și a informației

Îți organizezi gândirea mai clar, în pași, exact ca într-o demonstrație sau într-un algoritm.



Creativitate în raționament

Deși pare strictă, matematica oferă adesea mai multe căi spre același rezultat. Alegerea metodei potrivite implică intuiție și creativitate.



Gestionarea eficientă a timpului

Lucrul cu exerciții și probleme cronometrate te ajută să devii mai rapid și mai atent la cum îți folosești timpul.



Creșterea încrederii în propriile forțe

Fiecare exercițiu reușit îți întărește convingerea că poți învăța și poți reuși orice, cu perseverență și practică.



Abilități utile în orice domeniu

Matematica e peste tot: economie, informatică, arhitectură, medicină, inginerie – sau chiar când îți gestionezi bugetul.



Pregătirea pentru viață, nu doar pentru examene

Te învață că, în fața unei probleme, trebuie să ai răbdare, să cauți, să greșești, să înveți și să mergi mai departe!

Semnificația emoticoanelor folosite:



Asociere



Atenție!



Conexiuni



Grijă



Poveste



Reține!



Sfat

MEMORAREA

Memorarea este o funcție esențială a creierului uman, dar și una care ne pune deseori la încercare. Din fericire, există o mulțime de metode eficiente prin care poți **îmbunătăți capacitatea de memorare**, fie că e vorba de învățat pentru examene, dezvoltare personală sau pur și simplu pentru a-ți păstra mintea ascuțită. Matematica cere atât **înțelegere conceptuală**, cât și **memorarea unor formule, definiții, algoritmi** etc.

O strategie didactică eficientă pentru învățarea matematicii:



1. Repetiția spațiată (Spaced Repetition)

Nu repeta totul deodată. Împarte învățarea în mai multe sesiuni pe parcursul zilelor sau săptămânilor.

2. Asocierea ideilor (Mnemonicice)

Creează acronime, povești sau imagini mentale pentru a lega informațiile de ceva familiar.

3. Învățarea activă

În loc să recitești pasiv, încearcă să **explici** ceea ce ai învățat cu propriile cuvinte. Predă informația altcuiva – dacă poți s-o explici, o știi.

4. Utilizarea vizualului și a culorilor

Folosește **scheme, hărți mentale, desene** sau chiar coduri de culoare. Creierul procesează imaginile mult mai eficient decât textul brut.

5. Tehnici de concentrare și mindfulness

Elimină distragerile când înveți. Meditația sau exercițiile de respirație ajută la focus și la memorare pe termen lung.

6. Somn și odihnă

Studiile arată că **somnul joacă un rol crucial** în consolidarea memoriei. Ideal: 7-9 ore pe noapte și pauze scurte între sesiuni de învățare.

7. Exercițiul fizic

Activitatea fizică regulată îmbunătățește circulația sângelui, deci și oxigenarea creierului, ajută la funcțiile cognitive și la reducerea stresului.



8. Context și conexiuni

Leagă informația nouă de ceva ce știi deja. Când creezi **rețele de idei** în minte, reții mai bine decât când înveți fapte izolate.

ALGEBRĂ

1. Mulțimi

O **mulțime** este un ansamblu de obiecte distincte care sunt sau nu de aceeași natură (noțiune primară, care nu se definește prin raportare la alte noțiuni mai generale).

Mulțimile se notează, de obicei, cu litere mari: $A, B, \dots, A_1, A_2, \dots, A', A'', \dots$

Obiectele mulțimii se numesc **elementele mulțimii**. Se notează, de obicei, cu litere mici (dacă nu sunt numere) și se scriu o singură dată în mulțime.

Un element a **aparține** unei mulțimi A dacă este obiect în mulțime. Notăm $a \in A$.

Un element a **nu aparține** unei mulțimi A dacă nu este obiect în mulțime. Notăm $a \notin A$.

Mulțimile **se reprezintă** prin diagrame (Van-Euler), enumerarea elementelor (între acolade) sau prin menționarea unei proprietăți caracteristice.

Exemplu: $C = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ $C = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{x \mid x \text{ număr natural, } x \leq 3\}$.

Mulțimile în care toate elementele sunt numere se numesc **mulțimi numerice**.

Celelalte mulțimi se numesc **mulțimi nenumerice**.

Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu $\emptyset$.

Între două mulțimi poate fi relația de **incluziune**: $A \subseteq B \Leftrightarrow$ orice element din A este element în B (A **inclus** în B).

Spunem că A este **submulțime** a mulțimii B . Se mai scrie: $B \supseteq A$ (**include**). În caz contrar, $A \not\subseteq B$.

Numărul de elemente al unei mulțimi A se numește **cardinalul** mulțimii și se notează $Card A$.

Mulțimile sunt **finite** dacă au cardinalul un număr finit și **infinite** dacă au o infinitate de elemente.

Operații cu mulțimi:

Reuniunea: se notează $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$,

$$A \cup B = B \cup A$$

Intersecția: se notează $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$,

$$A \cap B = B \cap A$$

Diferența: se notează $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$,

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$



$$A \setminus B \subseteq A, B \setminus A \subseteq B$$

Produsul cartezian: se notează $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$
(mulțimea *perechilor ordonate*).



În general, $A \times B \neq B \times A$.

Două mulțimi care **nu** au elemente comune se numesc **disjuncte**.



$$\text{Atunci } A \cap B = \emptyset, A \setminus B = A, B \setminus A = B$$

Două mulțimi A, B care au aceleași elemente se numesc **mulțimi egale**.

Notăm $A = B \Leftrightarrow \{A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A\}$



$$A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B = A = B, A \setminus B = B \setminus A = \emptyset, A \times B = B \times A.$$



Între două mulțimi A și B nu este neapărată nevoie să existe o relație de incluziune.

Pot avea doar anumite elemente comune.

$$A \cap B \neq \emptyset, A \neq B, A \not\subseteq B, B \not\subseteq A.$$

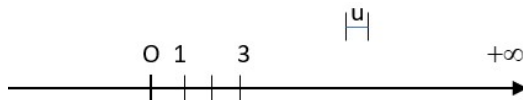
Exemplu: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

2. Mulțimea numerelor naturale

Se notează cu $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ numerică, infinită,

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mulțimea numerelor naturale nenule

Reprezentarea pe axă a numerelor naturale: (axa este o dreaptă pe care s-a ales un punct notat cu O , numit origine, un sens pozitiv dat de săgeată și o unitate de măsură notată cu „ u ”).



Pentru orice numere $a, b, c \in \mathbb{N}$, avem:

Proprietățile adunării numerelor naturale:

Asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Comutativitate: $a + b = b + a$

Element neutru: $0 \in \mathbb{N}$, $a + 0 = 0 + a = a$

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

Asociativitate: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Comutativitate: $a \cdot b = b \cdot a$

Element neutru: $1 \in \mathbb{N}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Distributivitatea față de adunare/scădere:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Înmulțirea cu 0: $a \cdot 0 = 0$

Factor comun: $\underline{a} \cdot b \pm \underline{a} \cdot c = \underline{a} \cdot (b \pm c)$ (a se numește factor comun)

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

$D = \hat{I} \cdot C + R$, $0 \leq R < \hat{I}$ unde D = deîmpărțitul,

$\hat{I}$ = împărțitorul, C = câtul, R = restul



Scrie întotdeauna ambele relații (formula și condiția pentru cât), chiar dacă cea de-a doua (poate) este îndeplinită din datele problemei. Astfel, vei avea la îndemână mereu toate datele, uneori condiția pentru cât este „cheia” rezolvării!

Puterea cu exponent natural: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$, cu $a, n \in \mathbb{N}^*$

Reguli de calcul cu puteri:

0^0 nu există

$0^n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$

$1^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$

$a^0 = 1$ $a \in \mathbb{N}^*$

$a^1 = a$, $a \in \mathbb{N}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$a^m : b^m = (a : b)^m$.



Ai reguli de calcul cu puteri pentru aceeași bază, „putere la putere” și același exponent.



Nu ai reguli de calcul cu puteri pentru adunare sau scădere, ci **doar** pentru înmulțire și împărțire!



$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$ De aceea nu există 0^0 (ar trebui să împărțim cu 0 și NU avem voie!)

$a^2 \stackrel{\text{definim}}{=} \text{pătratul numărului natural } a.$

Numărul natural n este **pătrat perfect** dacă există un număr natural a astfel încât $n = a^2$.

Compararea puterilor:

$a < b \Rightarrow a^n < b^n, n \geq 1$; **Observație!** $a^0 = b^0$ pentru orice numere naturale nenule a și b .

$m < n \Rightarrow a^m < a^n, a \geq 2$; **Observație!** $1^m = 1^n$ pentru orice numere naturale m și n .

($a, b, m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât să existe aceste expresii)

Scrierea în baza 10: $\overline{ab}_{(10)} = \overline{ab} = 10a + b,$

$\overline{abc}_{(10)} = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ ș.a.m.d. (a, b, c cifre, $a \neq 0$)

Scrierea în baza 2: $\overline{ab}_{(2)} = a \cdot 2^1 + b \cdot 2^0,$

$\overline{abc}_{(2)} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2^1 + c \cdot 2^0$ ș.a.m.d. (a, b, c cifre, $a \neq 0$)

Trecerea din baza 10 în baza 2: Efectuăm împărțiri succesive la 2, păstrăm restul, câtul devine deîmpărțit pentru pasul următor. Scriem numărul format din: ultimul rest, celelalte câturi în ordinea inversă obținerii.

Exemplu: $12 : 2 = 6$ rest 0 (a patra poziție), $6 : 2 = 3$ rest 0 (a treia poziție), $3 : 2 = 1$ (a doua poziție)

rest 1 (prima poziție) $\Rightarrow 12_{(10)} = 1100_{(2)}.$

Trecerea din baza 2 în baza 10: efectuăm calculele.

Exemplu: $1100_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 12.$

Ordinea efectuării operațiilor:

Dacă apar paranteze, efectuăm calculul din parantezele (), cele [] devin (), iar cele { } devin [] ș.a.m.d.

În cadrul parantezelor, prima dată efectuăm operațiile de ordin 3: ridicarea la putere, apoi cele de ordin 2: înmulțirea și împărțirea, apoi cele de ordin 1: adunarea și scăderea.

Dacă avem mai multe operații succesive, de același ordin, efectuăm operațiile în ordinea în care apar.



Dacă sunt DOAR adunări, putem folosi asociativitatea adunării.

Dacă sunt DOAR înmulțiri, putem folosi asociativitatea înmulțirii.

Dacă sunt ridicări la putere, putem mai întâi să aplicăm regulile de calcul cu puteri.

Divizibilitatea numerelor naturale

Notăție	Citim	Cum interpretăm	Ce înseamnă
$a : b$	a se divide cu b ($b \neq 0$)	a este multiplu al numărului b b este divizor al numărului a	Restul împărțirii lui a la b este 0
$b \mid a$	b divide a ($b \neq 0$)	a este multiplu al numărului b b este divizor al numărului a	Restul împărțirii lui a la b este 0
$a \nmid b$	a NU se divide cu b ($b \neq 0$)	a NU este multiplu al numărului b b NU este divizor al numărului a	Restul împărțirii lui a la b este nenul
$b \nmid a$	b NU divide a ($b \neq 0$)	a NU este multiplu al numărului b b NU este divizor al numărului a	Restul împărțirii lui a la b este nenul

Observații!

0 este multiplul oricărui număr natural.

Singurul multiplu al lui 0 este 0.

1 este divizorul oricărui număr natural.

0 nu divide niciun număr natural.

Orice număr natural nenul este divizor al lui 0.

Pentru numărul natural a

$M_a^{\text{not}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ multiplul numărului natural } a\} = \text{mulțimea}$
multiplilor naturali ai numărului natural a .

Exemple: $M_0 = \{0\}$, $M_5 = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$,

$$M_{10} = \{0, 10, 20, 30, \dots\}$$

$D_a^{\text{not}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divizorul numărului natural } a\} = \text{mulțimea}$
divizorilor naturali ai numărului natural a .

Exemple: $D_0 = \mathbb{N}^*$, $D_5 = \{1, 5\}$, $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$

Un număr natural cu DOI divizori se numește **număr prim**.



Exemple: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Vezi „Ciurul lui Eratostene”

Un număr natural nenul cu cel puțin trei divizori se numește
număr compus.

Exemple: 4, 6, 9, 10, 12, ...

**Observații!**

Numerele 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse. Orice număr compus se descompune în factori primi.



Numerele prime sunt invitații speciali la o petrecere, cu acces VIP – fiecare vine **cu doar două cunoștințe**: 1 și el însuși. Super exclusiviști! De exemplu: 5 e cu 1 și cu 5. Atât.

Numerele compuse sunt tipii sociabili de la petrecere au o grămadă de prieteni, adică **mai mulți divizori** decât 1 și ei înșiși. 6, *spre exemplu*, este mega popular: 1, 2, 3, 6 vin cu el.

Numărul 1 are doar un divizor.

Numărul 0 are o infinitate de „invitați”, deci nu au loc toți la petrecere. 😊

Criterii de divizibilitate:

Un număr natural este divizibil cu 2 $\Leftrightarrow$ ultima cifră este cifră pară (0 sau 2 sau 4 sau 6 sau 8)

Un număr natural este divizibil cu 5 $\Leftrightarrow$ ultima cifră este 0 sau 5

Un număr natural este divizibil cu 10^n $\Leftrightarrow$ ultimele n cifre sunt 0

Un număr natural este divizibil cu 3 $\Leftrightarrow$ suma cifrelor sale este divizibilă cu 3

Un număr natural este divizibil cu 9 $\Leftrightarrow$ suma cifrelor sale este divizibilă cu 9



Orice număr divizibil cu 10 este divizibil cu 2 și 5.

Orice număr divizibil cu 9 este divizibil cu 3.



Un număr divizibil cu 3 nu este neapărat divizibil cu 9
(*de exemplu: 12*).

Un număr divizibil cu 2 sau 5 nu este neapărat divizibil cu 10
(*de exemplu: 8, respectiv 15*).

c.m.m.d.c. = cel mai mare divizor comun = d : dacă $d|a, d|b$
și dacă $d'|a, d'|b$, atunci $d'|d$

Se notează $d = (a, b)$. Se calculează astfel:

1. descompunem numerele în factori primi;
2. luăm factorii primi comuni, o singură dată, la exponentul cel mai mic;
3. înmulțim numerele obținute la pasul anterior.

c.m.m.m.c. = cel mai mic multiplu comun = m : dacă

$a|m, b|m$ și dacă $a|m', b|m'$, atunci $m|m'$

Se notează $m = [a, b]$

Se calculează astfel:

1. descompunem numerele în factori primi;
2. luăm toți factorii (comuni sau necomuni), o singură dată, la exponentul cel mai mare;
3. înmulțim numerele obținute la pasul anterior.

Dacă $(a, b) = 1$, spunem că numerele **sunt prime între ele** (adică nu au divizori comuni în afară de 1).



Nu este obligatoriu să fie numere prime.

Exemple: $(5, 11) = 1$; $(4, 9) = 1$; $(7, 12) = 1$

Proprietățile divizibilității:

$$a|0, a \in \mathbb{N}^*$$

$$1|a, a \in \mathbb{N}$$

$$a|a, a \in \mathbb{N}^*$$

$$a|b, b|a \Rightarrow a = b, a, b \in \mathbb{N}^*$$

$$a|b, b|c \Rightarrow a|c$$

$$a|b, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a|mb$$

$$a|b, a|c \Rightarrow a|(b \pm c)$$

$$a|b, a|c \Rightarrow a|(mb + nc) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Pentru performanță



$$a|b \cdot c, (a, b) = 1 \Rightarrow a|c$$

$$a|b, a|c \Rightarrow a|(b, c)$$

$$a = mb \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = b \\ [a, b] = a \end{cases}$$

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = a \cdot b$$